

Regularity properties of a generalized Oseen evolution operator in exterior domains, with applications to the Navier-Stokes initial value problem

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
朝見陽介 (Yosuke ASAMI) *

概要

流体中を剛体が定められた運動をする際の、剛体周りの流れを求める問題を考察する。剛体の運動が時間に依存しているとき、対応する線形化方程式は非自励系となり、その解作用素は発展作用素と呼ばれる。Hansel-Rhandi[6] はこの発展作用素を構成し、非線形方程式の初期値問題の局所適切性を示したが、その解は軟解であった。本講演では初期値に空間方向の重みを考えることによって強解が得られたという結果を紹介する。

1 導入

$\mathbb{R}^3$ を満たす非圧縮粘性流体の中で、有界な剛体の障害物が運動しているものとする。このとき、その剛体の周りでの流れについて考察する。流れは剛体に密着させた座標系での Navier-Stokes 方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u - (\eta + \omega \times x) \cdot \nabla u + \omega \times u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, & \operatorname{div} u = 0, & (x, t) \in D \times (0, T) \\ u|_{\partial D} = \eta + \omega \times x, & u \rightarrow 0 & \text{as } |x| \rightarrow \infty, \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \end{cases} \quad (1.1)$$

に従う。ここで $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$, t はそれぞれ位置座標と時刻, D は $C^{1,1}$ の境界 ∂D をもつ $\mathbb{R}^3$ の外部領域であり, $\mathbb{R}^3 \setminus D \subset B_1$, $B_1 := \{|x| < 1\}$ を仮定する。未知関数は流体の速度場を表すベクトル値関数 $u = u(x, t) \in \mathbb{R}^3$ と圧力を表すスカラー値関数 $p = p(x, t) \in \mathbb{R}$ である。 $\eta = \eta(t)$, $\omega = \omega(t)$ はそれぞれ剛体重心の並進速度, 重心周りの回転角速度であり, この 2 つは既知である。また, $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2$ は 3 次元 Laplacian, $\nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$ は 3 次元勾配, div はベクトル場の発散, $\times$ は 3 次元ベクトルの外積を表す。(1.1) の第 1 式は流体の運動量保存則 (Navier-Stokes 方程式) と質量保存則である。第 2 式は境界条件を表し, 前者は滑りなし境界条件 (境界上での流体の速度と剛体の速度が一致する条件) を, 後者は無限遠方で流体が静止する条件を表す。第 1 式に現れる $(\omega \times x) \cdot \nabla u$ は外部領域で非有界な係数を伴う項で, この問題でしばしば困難を引き起こす重要な項である。なお, $\eta(t) \equiv \omega(t) \equiv 0$ ならば, 通常の Navier-Stokes 方程式の外部問題を表し, Iwashita[9] などで考察されている。

* 本講演は名古屋大学の菱田俊明氏との共同研究に基づく。E-mail: yosuke.asami.e6@math.nagoya-u.ac.jp

本講演の主題は, (1.1) の時間局所適切性 (一意解の存在性と初期値の連続依存性) である. Hansel-Rhandi[6] は, 後に述べる線形化問題 (2.5) の発展作用素 $T(t, s)$ を構成し, (1.1) に対する一意な時間局所解の存在を示した. 注意すべきこととして, この発展作用素の生成作用素 $L(t)$ (その定義は後の (2.7)–(2.8) で与えられる) は, 各 t を固定したときに解析的半群を生成せず, それゆえ (1.1) を [12] などの発展作用素の一般論に基づいて関数解析的に考察することはできない. [6] は独自の視点に基づいて一意解を構成し, システムの局所適切性を論じた. ただし, その解のクラスは, 後の (4.1) で与えられる積分方程式の解 (軟解) であり, 時間変数 t に関する微分可能性をはじめ, 解の正則性については明らかにはなっていない. 本講演では, 発展作用素の新しい正則性評価に基づいて, 時間変数に関して C^1 級の解が得られたことを報告する.

2 発展作用素

主結果の紹介の前に, 本章では後に述べる (1.1) の線形化問題 (2.5) において時間発展を司る発展作用素 $\{T(t, s)\}_{t \geq s \geq 0}$ に関する先行研究について述べる. まずは発展作用素に関する予備知識について紹介した後, 本問題固有の話題について述べる.

2.1 放物型発展作用素

本講演の主題でもある発展作用素について, 以下の常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + A(t)u = 0 & t \in (s, \infty), \\ u(s) = f \end{cases} \quad (2.1)$$

を例に挙げて解説をする. まず, u が $\mathbb{R}^N$ に値を取る関数で, $A(t)$ が時刻 t には依存しない N 次の定数行列 A である場合, 初期値問題 (2.1) の解作用素は行列の指数関数を用いて

$$u(t) = e^{-(t-s)A} f, \quad e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \quad (2.2)$$

と表される. また, u が Banach 空間 X に値を取る関数で, 同じく $A(t)$ が時刻によらない Banach 空間 X 上の線形作用素 A である場合, (2.1) の解作用素は作用素半群 $\{e^{-(t-s)A}\}_{t \geq s}$ を用いて (2.2) と表すことができる (後者の級数による表示は A が X 上の有界作用素である時にのみ有効である). この時の作用素 A のことを, 半群 $e^{-(t-s)A}$ の生成作用素と呼ぶ. 本稿で取り扱う発展作用素は, この生成作用素が時間依存している場合の解作用素 $\{U(t, s)\}_{t \geq s \geq 0}$ のことを指す. この発展作用素を用いれば, (2.1) の解は,

$$u(t) = U(t, s)f$$

と表示できる. 定数係数の時と違って, 初期時刻 s も解作用素のパラメータ (従って発展作用素は 2-パラメータ族) になることに注意されたい. また, これらの解作用素には semigroup property (半群性) と呼ばれるものがあり, 発展作用素に対しては $s \leq \tau \leq t$ に対して

$$U(t, \tau)U(\tau, s)f = U(t, s)f \quad (2.3)$$

が成り立つ. この左辺は, (2.1) を時刻 τ まで解き, 改めて $U(\tau, s)f$ を初期値とみて時刻 t まで解いたものを, 一方右辺は (2.1) を一気に時刻 t まで解いたものを表し, 関係式 (2.3) はそれらが一致すること (解の一意性) を表している. この semigroup property は, 4 節で述べる解の正則性でも用いる.

また, 生成作用素 $A(t)$ が各点 t を固定したときに解析的半群を生成し, さらに $A(t)$ の resolvent 作用素について, t に関する一様有界性をはじめとした複数の評価式が成り立つとき, $U(t, s)$ は放物型発展作用素と呼ばれる (解析的半群については [5, 7.4 節] を, 必要な評価式については [12, 第 5 章] を参照されたい). 放物型発展作用素の顕著な性質として, 平滑化効果が挙げられ, これは $f \in X$ (必ずしも生成作用素の定義域 $D(A(t))$ に属していなくても良い) に対し,

$$U(t, s)f \in D(A(t)), \quad \frac{\partial}{\partial t} U(t, s)f + A(t)U(t, s)f = 0 \quad (2.4)$$

が成り立つことを言う. このことは, 次節で述べる解の正則性評価とも関わる.

2.2 (1.1) の線形化問題と発展作用素 $T(t, s)$

話を戻して, (1.1) の線形化問題

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u - (\eta + \omega \times x) \cdot \nabla u + \omega \times u + \nabla p = 0, & \operatorname{div} u = 0, & (x, t) \in D \times (0, T) \\ u|_{\partial D} = 0, & u \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow \infty, \\ u(\cdot, s) = f(\cdot) \end{cases} \quad (2.5)$$

を考える. 第 1 式を抽象的な常微分方程式に書き換えるため, まずはベクトル場の Helmholtz 分解 (直和分解 [11]) から始める. 以下, $1 < q < \infty$ とし, G は $\mathbb{R}^3$ それ自身, または外部領域を表すものとする. G 上 q 乗可積分関数の空間 $L^q(G)$ には直和分解

$$\begin{aligned} L^q(G) &= L_\sigma^q(G) \oplus \{\nabla p \in L^q(G) : p \in L_{\text{loc}}^q(\overline{G})\}, \\ L_\sigma^q(G) &= \begin{cases} \{u \in L^q(D) : \operatorname{div} u = 0 \text{ in } D, \quad \nu \cdot u|_{\partial D} = 0\}, & G = D, \\ \{u \in L^q(\mathbb{R}^3) : \operatorname{div} u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3\}, & G = \mathbb{R}^3, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.6)$$

が成り立ち, それゆえ射影作用素 $P : L^q(G) \rightarrow L_\sigma^q(G)$ が定まる. ただし, ν は D 上外向きの単位法線ベクトルを表す. (2.5) の第 1 式において, 圧力は時間発展しないため, 方程式の両辺に射影作用素 P を施して圧力を消去し, $L_\sigma^q(D)$ 上での常微分方程式

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + L(t)u = 0, & (x, t) \in D \times (0, T), \\ u(\cdot, s) = f(\cdot) \in L_\sigma^q(D) \end{cases}$$

を考察する. ただし, 作用素 $L(t)$ とその定義域 $D_q(L(t))$ は,

$$L(t)u = P(-\Delta - (\eta(t) + \omega(t) \times x) \cdot \nabla + \omega(t) \times) u \quad (2.7)$$

$$D_q(L(t)) = \{u \in L_\sigma^q(D) \cap W_0^{1,q}(D) \cap W^{2,q}(D) : (\omega(t) \times x) \cdot \nabla u \in L^q(G)\} \quad (2.8)$$

で与えられる. この $L(t)$ が本講演での主題となる発展作用素 $T(t, s)$ を生成する. 注意すべきこととして, $L(t)$ は $\omega(t) \equiv 0$ でない限り, 各 t を固定したときに解析的半群の生成作用素とはならない. その原因は移流項の係数 $(\omega(t) \times x)$ が外部領域 D において非有界となるためであり, それゆえ $T(t, s)$

は双曲型発展作用素^{*1}に分類される。しかしながら、(1.1) は剛体に密着させた座標変換を行うことで得られ、その過程で移流項 $(\eta(t) + \omega(t) \times x) \cdot \nabla u$ (と $\omega(t) \times u$) がもたらされることを考えると、解の平滑化が起きないことも考えにくく、実際 Hansel-Rhandi[6] は独自の視点に基づいて $T(t, s)$ が L^q - L^r 平滑性評価を持つことを示した。しかし、(2.4) のような等式が成り立つには、 $f \in Y_q(D)$ (その定義は (3.1) を参照) でなければならず、初期値に対して強い滑らかさを課さなければならなかった。本研究では、 $f \in L^q_\sigma(D)$ かつ $|x|f \in L^q(D)$ に対して (2.4) が成り立つことを示し、それを通して非線形問題 (1.1) の精密な評価を行った。

3 主結果

本研究 [1] では (2.5) の発展作用素に関する新しい評価を導出し、それを非線形問題 (1.1) に適用して時間局所解の構成を行った。ここでは、非線形問題での結果に焦点を当てて紹介する。

主定理の記述に際し、まずは関数空間の導入を行う。領域 G に対し、 $L^q(G)$ で G 上 q 乗可積分な空間を表し、そのノルムは $\|\cdot\|_{q,G}$ で表す。ただし、外部領域 D のノルムは単に $\|\cdot\|_q$ と書く。本講演では空間方向の重み $|x|f$ を考えた時の考察を行うため、 $\alpha \geq 0$ に対し、

$$\rho(x) := 1 + |x| \\ L^q_\alpha(G) := \{u \in L^q(G) : \rho^\alpha u \in L^q(G)\}, \quad L^q_{\alpha,\sigma} := L^q_\alpha(G) \cap L^q_\sigma(G)$$

で定める ($L^q_\sigma(G)$ の定義は (2.6) で述べている)。また、解の空間方向に対する正則性を捉えるため、

$$Y_q(G) := \{u \in L^q_\sigma(G) \cap W^{1,q}_0(G) \cap W^{2,q}(G) : \rho \nabla u \in L^q(G)\}, \\ \|u\|_{Y_q(G)} := \|u\|_{q,G} + \|\rho \nabla u\|_{q,G} + \|\nabla^2 u\|_{q,G} \quad (3.1)$$

と定める。明らかに、 $Y_q(D) \subset D_q(L(t))$ が任意の $t \geq 0$ に対して成り立つ。

まず (1.1) では、滑りなし境界条件により境界値が 0 になっていないが^s、 $u|_{\partial D} = \eta + \omega \times x = (1/2)\text{rot}\{\eta \times x - |x|^2\omega\}$ と書けるので、 $0 \leq \phi \leq 1$ かつ境界 ∂D の近傍で $\phi = 1$ となる cut-off 関数 ϕ を固定し、

$$b(x, t) := \frac{1}{2}\text{rot}\{\phi(x)(\eta(t) \times x - |x|^2\omega(t))\} \\ u(x, t) = b(x, t) + v(x, t), \quad (3.2)$$

を考える。ただし、 rot はベクトル場の回転を表す。この時、 v の満たす方程式は、

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + L(t)v + P(v \cdot \nabla v + b \cdot \nabla v + v \cdot \nabla b)(t) = PF(t), & t \in (0, \infty), \\ v(0) = v_0 := u_0 - b(0), \end{cases} \quad (3.3)$$

ただし、

$$F := -\partial_t b + \Delta b + (\eta + \omega \times x) \cdot \nabla b - \omega \times b - b \cdot \nabla b, \quad (3.4)$$

である。この時、以下が成り立つ。

^{*1} ただし「双曲型」とは「放物型ではない」という意味であり、波動方程式などの双曲型方程式が属するクラスよりずっと広いクラスを指す (発展作用素論における術語である)。

Theorem 3.1 ([1, Theorem 2.5]). $\vartheta \in (0, 1], \gamma \in [0, 1)$ とし, $\mathcal{T} \in (0, \infty)$ を任意に取る. η, ω は,

$$\begin{aligned} \eta, \omega &\in C_{\text{loc}}^{1, \vartheta}((0, \infty); \mathbb{R}^3), \quad |\eta'(t)| + |\omega'(t)| = O(t^{-\gamma}) \quad \text{as } t \rightarrow 0, \\ |\eta'(t) - \eta'(\tau)| + |\omega'(t) - \omega'(\tau)| &\leq C(t - \tau)^\vartheta \tau^{-\gamma - \vartheta} \quad \left(\frac{t}{2} < \tau < t \leq \mathcal{T} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

を満たすとする. この時, 任意の $q \in (3, \infty)$, $v_0 \in L_{1, \sigma}^q(D)$ に対して, ある $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_0(\|\rho v_0\|_q, m_0, q, \gamma, D) \in (0, 1]$ が存在して, 区間 $[0, \mathcal{T}_0]$ 上における (3.3) の時間局所解 $v(t)$ が以下のクラスで存在する:

$$v \in C([0, \mathcal{T}_0]; L_\sigma^q(D)) \cap C^1((0, \mathcal{T}_0]; L_\sigma^q(D)), \quad (3.6)$$

$$v(t) \in Y_q(D) \quad \forall t \in (0, \mathcal{T}_0], \quad L(\cdot)v \in C((0, \mathcal{T}_0]; L_\sigma^q(D)). \quad (3.7)$$

さらにこの解は, 以下の平滑化効果および初期値への収束を達成する: $r \in [q, \infty]$ に対し, ある定数 $C_1 = C_1(m_0, q, r, \gamma, D) > 0$, $C_2 = C_2(m_0, q, \vartheta, \gamma, D) > 0$ に対して,

$$\sup_{0 < t \leq \mathcal{T}_0} \left(t^{(3/q - 3/r)/2} \|\rho v(t)\|_r + t^{1/2 + (3/q - 3/r)/2} \|\rho \nabla v(t)\|_r \right) \leq C_1(\|\rho v_0\|_q + 1), \quad (3.8)$$

$$\sup_{0 < t \leq \mathcal{T}_0} (t \|\partial_t v(t)\|_q + t \|\nabla^2 v(t)\|_q) \leq C_2(\|\rho v_0\|_q + m_1), \quad (3.9)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\rho(v(t) - v_0)\|_q = 0, \quad (3.10)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{j/2 + (3/q - 3/r)/2} \|\rho \nabla^j v(t)\|_r = 0, \quad j \in \{0, 1\}, \quad (j, r) \neq (0, q) \quad (3.11)$$

ただし,

$$\begin{aligned} m_0 &:= \sup_{0 \leq t \leq 1} (|\eta(t)| + |\omega(t)|) + \sup_{0 < t \leq 1} t^\gamma (|\eta'(t)| + |\omega'(t)|), \\ m_1 &:= \sup_{\frac{t}{2} < \tau < t \leq 1} \frac{\tau^{\gamma + \vartheta} (|\eta'(t) - \eta'(\tau)| + |\omega'(t) - \omega'(\tau)|)}{(t - \tau)^\vartheta} + m_0 + m_0^2. \end{aligned}$$

Remark 3.2. 主定理についていくつか注意を述べる.

1. Theorem 3.1 では, (1.1) から導かれる方程式 (3.3) の解の性質 (3.8)–(3.11) について述べているが, 関係式 (3.2) を用いることにより,

$$u \in C([0, \mathcal{T}_0]; L^q(D)) \cap C^1((0, \mathcal{T}_0]; L^q(D))$$

であることも従う.

2. Fujita-Kato[4] によれば, 非線形偏微分方程式をスケール変換に関して不変な空間 (臨界空間) で考察することの重要性が指摘されている (Fujita-Kato の原理). 例えば全空間 $\mathbb{R}^n$ における通常の Navier-Stokes 方程式は $L^n(\mathbb{R}^n)$ が臨界空間となる. (1.1) は不変にするスケール変換を持たないが, $L^3(D)$ で解析をすることによって, 時間大域的な軟解の存在およびその性質が Hishida[7] で調べられている. しかしながら, Theorem 3.1 は $q = 3$ を含んでおらず, 臨界空間での解析は行えていない. その理由は, Duhamel 項の微分の評価を行う際, weight を 2 つ課した $\rho^2 P f$ の L^q ノルムを評価しなければならないが ([1, Section 8], 後の (4.13) も参照), $\|\rho^2 P f\|_q \leq C \|\rho^2 f\|_q$ となるのは, $q \in (3, \infty)$ の時, かつこの時に限るからである (Muckenhoupt weight, [3] 参照).

3. 一意性については、解の存在性と独立に述べることで、一意性が成り立つ解のクラスは (3.6)–(3.7) より広い。後に述べる積分方程式 (4.1) について、解は存在したならば以下のクラスで一意的であることも示した ([1, Proposition 9.1]) : $\mathcal{T} \in (0, \infty)$ に対して、

$$v \in L^\infty(0, \mathcal{T}; L_\sigma^q(D)), \quad t^{1/2} \nabla v \in L^\infty(0, \mathcal{T}_0; L^q(D)).$$

これについては、Fujita-Kato[4, Theorem 3.1] に記された方法で示す事ができる。

4. 仮定 (3.5) は、元の問題 (1.1) を (3.3) に書き換えた時に現れる関数 F (その表示は (3.4) を参照) の $\partial_t b$ が well-defined になるための仮定であり、発展作用素 $T(t, s)$ それ自体を調べるための仮定としては過剰である。発展作用素の生成、及びその評価の確立のためには、

$$\eta, \omega \in C_{\text{loc}}^{0, \theta}([0, \infty) : \mathbb{R}^3), \quad \theta \in (0, 1] \quad (3.12)$$

で十分である。

[6] は、 $v_0 \in L_\sigma^q(D)$, $q \in [3, \infty)$ のもと、 $v \in L^\infty(0, \mathcal{T}_0; L_\sigma^q(D))$ かつ $t^{1/2} \nabla v \in L^\infty(0, \mathcal{T}_0; L^q(D))$ なる時間局所的な一意解が存在することを示した (本研究とは違って、臨界空間 $L_\sigma^3(D)$ も含まれている)。Theorem 3.1 は、仮定 $v_0 \in L_{1, \sigma}^q(D)$, $q \in (3, \infty)$ が満たされるならば、解 v が [6] よりさらに詳細なクラス (3.6)–(3.7) に属することを示している。

4 証明の概略

主定理は、発展作用素 $T(t, s)$ に対する評価を用いて、積分方程式

$$v(t) = T(t, 0)v_0 - \int_0^t T(t, \xi)P(v \cdot \nabla v + b \cdot \nabla v + v \cdot \nabla b + F)(\xi) d\xi \quad (4.1)$$

に対する解の存在、及びその解を評価することによって得られる (この論法は、[10] などにも見られる標準的な議論である)。従って、発展作用素 $T(t, s)$ 自体に成り立つ評価が、論証における中心の役割を果たすため、以下では発展作用素に対する評価について述べる。以下、断らない限り $\mathcal{T} \in (0, \infty)$, $0 \leq s < t \leq \mathcal{T}$ とする。また、Remark 3.2 の 4. に基づいて、(3.12) を仮定し、 $m \in (0, \infty)$ に対して、

$$\sup_{0 \leq t \leq \mathcal{T}} (|\eta(t)| + |\omega(t)|) + \sup_{0 \leq s < t \leq \mathcal{T}} \frac{|\eta(t) - \eta(s)| + |\omega(t) - \omega(s)|}{(t - s)^\theta} \leq m$$

が成り立つとする。以下で述べる発展作用素の評価で、定数 C は常に $\mathcal{T}, m$ に依存するが、 η, ω に対しては一様にとることができる。

一般に外部問題の考察では、しばしば「全空間 $\mathbb{R}^3$ に対する評価」と「有界領域 B_R に対する評価」とを組み合わせた評価が行われる。全空間における線形化問題 ((2.5) において、 D を $\mathbb{R}^3$ に取り替えたもの) の発展作用素 $f \mapsto U(t, s)f$ は、熱半群 $e^{t\Delta}$ を用いて明示的に表示でき、以下の L^q - L^r 平滑性評価が成り立つ。

Proposition 4.1 ([1, Proposition 4.1]). $\alpha \geq 0, q \in [1, \infty], r \in [q, \infty]$ とし、 $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とすると、 $f \in L_\alpha^q(\mathbb{R}^3)$ に対して以下が成り立つ：

$$\|\rho^\alpha \nabla^j U(t, s)f\|_{r, \mathbb{R}^3} \leq C(t - s)^{-j/2 - (3/q - 3/r)/2} \|\rho^\alpha f\|_{q, \mathbb{R}^3}.$$

この $U(t, s)$ と, 有界領域 $D_7 := D \cap B_7$ ($B_7 := \{|x| < 7\}$) に対する発展作用素 $V(t, s)$, および適当な cut-off 関数 ϕ を用いて外部領域に対する発展作用素の第 0 近似 $T_0(t, s)$ を,

$$T_0(t, s)f = W(t, s)f = (1 - \phi)U(t, s)f_0 + \phi V(t, s)f + \mathbb{B}[(U(t, s)f_0 - V(t, s)f_1) \cdot \nabla \phi] \quad (4.2)$$

で定める. ただし, f_0, f_1 は f を $\mathbb{R}^3, D_7$ に適当に修正したもので, $\mathbb{B}$ は solenoidal 条件 $\operatorname{div} u = 0$ の回復に伴う Bogovskiĭ 作用素 [2] を表す. この第 0 近似は, 方程式

$$\partial_t W(t, s)f + L(t)W(t, s)f = -PK(t, s)f$$

を満たす. ただし, $PK(t, s)f$ は剰余項で, D 上コンパクトな台を持つ. Hansel-Rhandi は [6, Section 5] において, 所要の発展作用素 $T(t, s)$ を以下の積分方程式

$$T(t, s)f = W(t, s)f + \int_s^t T(t, \tau)PK(\tau, s)f d\tau$$

を解くことによって構成した. 構成の方法は逐次近似法

$$T_{j+1}(t, s)f = \int_s^t T_j(t, \tau)PK(\tau, s)f d\tau, \quad T_0(t, s)f = W(t, s)f \quad (4.3)$$

に基づき, (2.5) の発展作用素 $T(t, s)f$ は

$$T(t, s)f = \sum_{j=0}^{\infty} T_j(t, s)f \quad (4.4)$$

で与えられる. Proposition 4.1 と合わせて, 以下が得られる.

Proposition 4.2 ([1, Theorem 2.1]). $\alpha \in [0, 3), q \in \left(\frac{3}{3-\alpha}, \infty\right), r \in [q, \infty]$ とし, $j \in \{0, 1\}$ とすると, $f \in L_{\alpha, \sigma}^q(D)$ に対して以下が成り立つ:

$$\|\rho^\alpha \nabla^j T(t, s)f\|_r \leq C(t-s)^{-j/2-(3/q-3/r)/2} \|\rho^\alpha f\|_q. \quad (4.5)$$

この平滑性評価 (4.5) を元に, 仮定 $\rho v_0 \in L^q(D)$ から t について C^1 級の (線形化方程式の) 解が得られることについて述べる. まず解の正則性を捉える補助空間として, $Z_q(D)$ を

$$Z_q(D) := \{u \in L_\sigma^q(D) : \rho \nabla u \in L^q(D)\}, \\ \|u\|_{Z_q(D)} := \|u\|_q + \|\rho \nabla u\|_q$$

で定める. Hishida は [8, Section 5] において, $f \in Z_q(D)$ ($3/2 < q < \infty$) なる初期値に対して, この発展作用素 $T(t, s)$ は t に関する正則性

$$T(\cdot, s)f \in C^1((s, \infty); L_\sigma^q(D)), \quad t \in (s, \infty)$$

および (2.4) のような平滑化効果が成り立つことを指摘した. これは [6] が述べていた $f \in Y_q(D)$ に対する平滑化効果と比べると, 初期値に対する仮定が緩められていることが分かる. これと (4.5) を $r = q, (j, \alpha) = (0, 0), (1, 0), (1, 1)$ に対して用いると, $f \in L_{1, \sigma}^q(D)$ ならば, $s < t (\leq T)$ に対して,

$$T(t, s)f, \quad \rho \nabla T(t, s)f \in L^q(D)$$

が成り立つことが分かる．すなわち，線形化方程式 (2.5) の解 $T(t, s)f$ は，初期時刻 s を離れると直ちに空間 $Z_q(D)$ の元となることがしたがう．これと semigroup property (2.3) を合わせると，任意の $\varepsilon > 0$, $t - s \geq \varepsilon$ に対して， $f \in L_{1,\sigma}^q(D)$ ならば，線形化方程式の解 $T(t, s)f$ を

$$T(t, s)f = T(t, s + \varepsilon)T(s + \varepsilon, s)f$$

と見ることにより， $\varepsilon > 0$ の任意性から $T(\cdot, s)f \in C^1((s, \mathcal{T}]; L_\sigma^q(D))$ であることが従い， $L(t)T(t, s)$ の評価を用いることで，発展作用素の時間微分，および空間 2 階微分に対して以下が従う．

Proposition 4.3 ([1, Theorem 2.2]). $q \in (\frac{3}{2}, \infty)$ とすると， $f \in L_{1,\sigma}^q(D)$ に対して，以下が成り立つ：

$$\|\partial_t T(t, s)f\|_q + \|T(t, s)f\|_{Y_q(D)} \leq C(t - s)^{-1}\|f\|_q + C(t - s)^{-1/2}\|\rho f\|_q \quad (4.6)$$

Proposition 4.2, 4.3 を組み合わせることにより，発展作用素 $T(t, s)$ の t に関する Hölder 評価も得られる．以下の (4.7) は，Duhamel 項及び (3.3) の解の評価においても用いられる．

Proposition 4.4 ([1, Theorem 2.3]). $q \in (\frac{3}{3-\alpha}, \infty)$, $r \in [q, \infty]$, $j = \{0, 1\}$ とし， $\mu_j \in (0, 1 - \frac{j}{2}]$ とすると， $f \in L_{1,\sigma}^q$, $0 \leq s < \tau < t \leq \mathcal{T}$ に対して，以下が成り立つ：

$$\|\nabla^j T(t, s)f - \nabla^j T(\tau, s)f\|_r \leq C(t - \tau)^{\mu_j}(\tau - s)^{-j/2 - (3/q - 3/r)/2 - \mu_j}\|\rho f\|_q, \quad (4.7)$$

ただし， $r = \infty$ の場合， $\mu_j = 1 - j/2$ は含めない．

積分方程式 (4.1) の考察には，発展作用素 $T(t, s)$ の評価のみならず，Duhamel 項が t について C^1 級の関数になるための十分条件の考察および評価式も要する．以下， $\mu \in (0, 1]$, $\kappa \in [0, 1)$ とし，Duhamel 項を

$$w(t) := \int_s^t T(t, \sigma)g(\sigma) d\sigma, \quad (4.8)$$

$$(\cdot - s)^\kappa g \in L^\infty(s, \mathcal{T}; L_{2,\sigma}^q(D)), \quad (4.9)$$

$$g \in C((s, \mathcal{T}]; L_\sigma^q(D)), \quad \|g(t) - g(\sigma)\| \leq C(t - \sigma)^\mu(\sigma - s)^{-\kappa - \mu} \quad \left(\frac{s + t}{2} < \sigma < t \leq \mathcal{T}\right) \quad (4.10)$$

$$[g]_{q,\alpha,\kappa} := \sup_{\sigma \in (s, \mathcal{T})} (\sigma - s)^\kappa \|\rho^\alpha g(\sigma)\|_q, \quad \{g\}_{q,\mu,\kappa} := \sup_{\frac{s+t}{2} < \sigma < t \leq \mathcal{T}} \frac{(\sigma - s)^{\kappa + \mu} \|g(t) - g(\sigma)\|_q}{(t - \sigma)^\mu} \quad (4.11)$$

で定める．この時，以下が成り立つ．

Proposition 4.5 ([1, Theorem 2.4]). $q \in (\frac{3}{2}, \infty)$, $0 \leq s < \mathcal{T}$ とする．(4.8) で定義された $w(t)$ について，(4.9)–(4.11) のもと以下が成り立つ：

$$w \in C^1((s, \mathcal{T}]; L_\sigma^q(D)), \quad w(t) \in Y_q(D) \quad \forall t \in (s, \mathcal{T}], \quad L(\cdot)v \in C((s, \mathcal{T}]; L_\sigma^q(D)),$$

$$\frac{dw}{dt} + L(t)w = g(t), \quad t \in (s, \mathcal{T}],$$

$$\|\partial_t w(t)\|_q + \|\nabla^2 w(t)\|_q \leq C(t - s)^{-\kappa} ([g]_{q,2,\kappa} + \{g\}_{q,\mu,\kappa}).$$

以下では、 $\partial_t w$ に注目し、 g に対して weight を 2 つ要する理由について述べる。まず発展作用素 $T(t, s)$ は (4.4) によって得られたものであるが、初期時刻 $t = s$ における特異性は $T_0(t, s) = W(t, s)$ ((4.2), (4.3) 参照) が最も強い [1, Section 8, (8.6)]. そのため以下では (4.8) で $T(t, \sigma)$ を $W(t, \sigma)$ に取り替えたものについて述べる。まず (4.8) の時間微分について、

$$\int_s^{(s+t)/2} \partial_t W(t, \sigma) g(\sigma) d\sigma + \int_{(s+t)/2}^t \partial_t W(t, \sigma) g(\sigma) d\sigma =: w_1(t) + w_2(t)$$

と分けて考察する。(4.6) より、 $w_1(t)$ の方は区間 $[s, (s+t)/2]$ 上で可積分であり問題は無い。しかし一方で $w_2(t)$ に (4.6) をそのまま適用すると、 $\sigma = t$ における特異性が強すぎるため、 g に対する Hölder 連続性 (4.10) を援用して特異性を可積分程度のもに緩める。(4.10) は、Hölder 評価を利用したぶん初期時刻 $\sigma = s$ 近傍の特異性が強まる評価となっているが、 $w_2(t)$ の積分区間に $\sigma = s$ は含まれないため、この特異性は問題にならない (従って、 $-\kappa - \mu < -1$ のような強い特異性を持っていたもよい)。ここで、 $\mathbb{R}^3$ 上の発展作用素 $U(t, s)$ が関わる部分に注目すると、

$$\begin{aligned} \int_{(s+t)/2}^t (1 - \phi) \partial_t U(t, \sigma) g_0(\sigma) d\sigma &= \int_{(s+t)/2}^t (1 - \phi) \partial_t U(t, \sigma) (g_0(\sigma) - g_0(t)) d\sigma \\ &\quad - \int_{(s+t)/2}^t (1 - \phi) L_{\mathbb{R}^3}(t) \left(U(t, \sigma) - e^{-(t-\sigma)L_{\mathbb{R}^3}(t)} \right) g_0(t) d\sigma \\ &\quad + (1 - \phi) e^{-\frac{(t-s)}{2} L_{\mathbb{R}^3}(t)} g_0(t) \end{aligned} \quad (4.12)$$

と変形できる。ただし、 $L_{\mathbb{R}^3}(t)$ 、 $e^{-tL_{\mathbb{R}^3}(t)}$ は $\mathbb{R}^3$ 上の線形化問題に現れる線形作用素、及び t を固定したときに $L_{\mathbb{R}^3}(t)$ が生成する半群で、 g_0 は g を $\mathbb{R}^3$ へゼロ拡張した関数である。(4.12) 右辺第 2 項の評価には

$$\left\| L_{\mathbb{R}^3}(t) \left(U(t, s) - e^{-(t-s)L_{\mathbb{R}^3}(t)} \right) f \right\|_{q, \mathbb{R}^3} \leq C(t-s)^\theta \left((t-s)^{-\frac{1}{2}} \|\rho f\|_{q, \mathbb{R}^3} + \|\rho^2 f\|_{q, \mathbb{R}^3} \right) \quad (4.13)$$

を用いる ([1, Lemma 4.2]). ただし、 θ は (3.12) で課した η, ω の Hölder 次数である。この右辺に ρ^2 が現れるため、非同次項 g には (4.9) のように weight を 2 つ課さなければならない。なお、 η, ω が $\mathbb{R}^3$ の定数ベクトルの場合、発展作用素 $U(t, s)$ は半群 $e^{-(t-s)L_{\mathbb{R}^3}}$ に一致するため (4.12) の右辺第 2 項は現れず、 g に対して課す weight ρ は 1 つで十分である (従って weight が 2 つ必要になるのは、非自励系特有の事象であると言える)。 $w(t)$ が t について C^1 級であることは、任意の $\varepsilon > 0$ に対する補助関数

$$w_\varepsilon(t) := \int_s^{t-\varepsilon} T(t, \sigma) g(\sigma) d\sigma$$

が区間 $(s, \mathcal{T}]$ 上の任意の compact 集合上で C^1 級であること、および $\varepsilon \rightarrow 0$ で $w(t)$ に $(s, \mathcal{T}]$ 上広義一様収束することにより従う。

参考文献

- [1] Asami, Y., Hishida, T.: Regularity properties of a generalized Oseen evolution operator in exterior domains, with applications to the Navier-Stokes initial value problem. arXiv:2411.19711
- [2] Bogovskii, M.E.: Solution of the first boundary value problem for the equation of continuity of an incompressible medium. Sov. Math. Dokl. **20**, 1094–1098 (1979)
- [3] Farwig, R., Sohr, H.: Weighted L^q -theory for the Stokes resolvent in exterior domains. J. Math. Soc. Japan **49**, 251–288 (1997)
- [4] Fujita, H., Kato, T.: On the Navier-Stokes initial value problem. I. Arch. Rational Mech. Anal. **16**, 269–315 (1964)
- [5] 藤田宏, 黒田成俊, 伊藤清三: 関数解析. 岩波書店 (1991)
- [6] Hansel, T., Rhandi, A.: The Oseen-Navier-Stokes flow in the exterior of a rotating obstacle: the non-autonomous case. J. Reine Angew. Math. **694**, 1–26 (2014)
- [7] Hishida, T.: Large time behavior of a generalized Oseen evolution operator, with applications to the Navier-Stokes flow past a rotating obstacle. Math. Ann. **372**, 915–949 (2018)
- [8] Hishida, T.: Decay estimates of gradient of a generalized Oseen evolution operator arising from time-dependent rigid motions in exterior domains. Arch. Rational Mech. Anal. **238**, 215–254 (2020)
- [9] Iwashita, H.: L_q - L_r estimates for solutions of the nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier-Stokes initial value problems in L_q spaces, Math. Ann. **285**, 265–288 (1989)
- [10] Kato, T.: Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions. Math. Z. **187**, 471–480 (1984)
- [11] Miyakawa, T.: On nonstationary solutions of the Navier-Stokes equations in an exterior domain. Hiroshima Math. J. **12**, 115–140 (1982)
- [12] 田辺広城: 発散方程式. 岩波書店 (1975)